مبحث شانزدهم (یکتایی مرکز جرم و نحوه محاسبه‌ی آن)

در پایان جلسه‌ی گذشته به این نکته اشاره کردیم که مرکز جرم یکتا بوده و همواره وجود دارد.

حال به اثبات وجود مرکز جرم می‌پردازیم:

نقطه‌ی دلخواهی در نظر گرفته و آن را A می‌نامیم و رابطه‌ی زیر را محاسبه نموده و f می‌نامیم.

$$\sum m_k r_{Ak} = \mathrm{f}$$

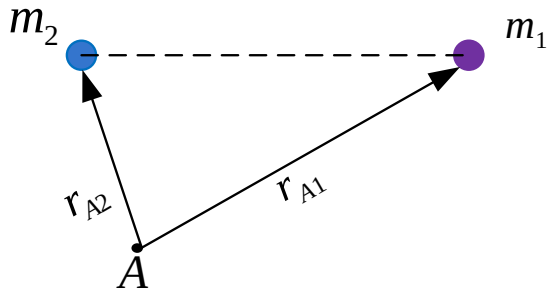
یا صفر است که در این‌صورت این نقطه همان مرکز جرم است و اگر ناصفر باشد حال نقطه‌ای غیر از A به نام C در نظر می‌گیریم که قرار است یافته شود و از طرفین رابطه‌ی فوق $\sum m_k r_{ck}$ را کم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\sum m_k (r_{Ak} - r_{Ck}) = \mathrm{f} - \sum m_k r_{Ck} \rightarrow \sum m_k (r_{Ak} + r_{kC}) = \mathrm{f} - \sum m_k r_{Ck} \rightarrow$$

$$\sum m_k r_{AC} = \mathrm{f} - \sum m_k r_{Ck} \rightarrow \mathrm{M_t} r_{AC} = \mathrm{f} - \sum m_k r_{Ck} \rightarrow r_{AC} = \frac{\mathrm{f} - \sum m_k r_{Ck}}{\mathrm{M_t}}$$

حال اگر C را به گونه‌ای تعیین کنیم که $r_{AC} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{M_t}}$ یعنی در فاصلهٔ $\frac{f}{M_t}$ از A بگیریم، عبارتِ $\sum m_k r_{Ck}$ ناچار باید صفر شود. بنابراین ثابت شد که همواره چنین C می‌توان یافت. بنابراین، اثبات وجود مرکز جرم روشی برای بدست آوردن مرکز جرم نیز می‌باشد.

به عنوان مثال در شکل زیر دو جسم m_1 و m_2 داریم و هدفمان تعیین جای مرکز جرم این دو جسم است. نقطه‌ای دلخواه مانند A در نظر می‌گیریم که جسم m_1 در فاصله‌ی r_{A1} از آن و جسم m_2 در فاصله‌ی r_{A2} از آن قرار دارد.

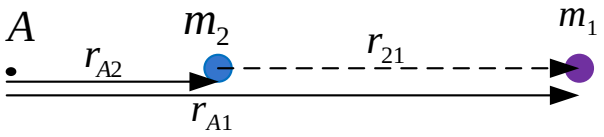


برای محاسبه‌ی مرکز جرم ابتدا $\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{M_t}}$ را بدست می‌آوریم:

$$r_{AC_m} = \frac{f}{M_t} = \frac{m_1 r_{A1} + m_2 r_{A2}}{m_1 + m_2}$$

به این ترتیب جای C_m نسبت به A بدست آمد.

در مثال فوق می‌توان با استفاده از این نکته که مرکز جرم حتماً روی خط واصل دو جسم قرار دارد نقطه‌ی A را نیز در همان امتداد اختیار کرد.

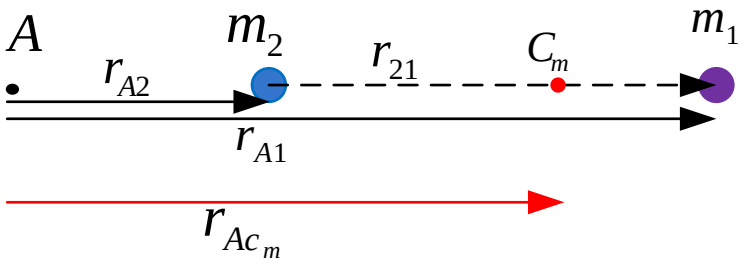


به این ترتیب با فرض m_1 ۲ کیلوگرم و m_2 ۱ کیلوگرم داریم:

$$r_{A2} + r_{21} = r_{A1} \qquad f = 2r_{A1} + r_{A2} = 2(r_{A2} + r_{21}) + r_{A2} = 2r_{21} + 3r_{A2}$$

$$r_{AC_m} = \frac{f}{M} = \frac{3r_{A2}}{3} + \frac{2r_{21}}{3} = r_{A2} + \frac{2r_{21}}{3}$$

یعنی جای آن مطابق شکل زیر است که نزدیک جسم سنگین‌تر یعنی m_1 قرار دارد.

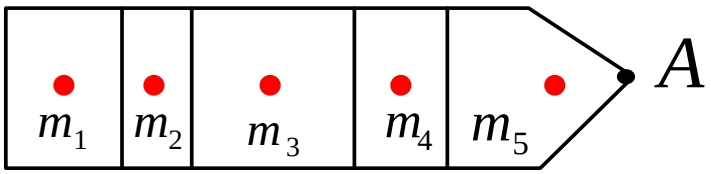


برای اثبات یکتایی مرکز جرم نیز می‌توانید دو مرکز جرم فرض نموده و اثبات کنید این دو حتماً روی یکدیگر قرار دارند.

در انتخاب A بسته به جسم سعی کنید راحت ترین A را انتخاب نمایید و معمولاً A را نقطه‌ای روی جسم در نظر می‌گیرند تا جای بقیه‌ی اجزای جسم نسبت به آن در هر لحظه مشخص باشد.

برای محاسبه‌ی مرکز جرم برای جسمی که از ذرات یا بخش‌های مختلفی تشکیل شده است می‌توانید مرکز جرم هر بخش را جداگانه بدست آورده و سپس مرکز جرم کل آن را بدست آورید.

به عنوان مثال برای یک موشک می‌توان نقطه‌ی A را در نوک موشک انتخاب نمود و مطابق شکل موشک را به پنج بخش با پنج جرم تصور نمود. و پس از محاسبه‌ی مرکز جرم هر بخش، مرکز جرم کل جسم را محاسبه نمود.



همچنین در موشک m_3می‌تواند با سوختن سوخت هم جرمش تغییر کند و هم بسته به نحوه ی سوختن سوخت محل مرکز جرم آن تغییر کند. ولی رابطه‌ی موجود در هر لحظه برقرار است.

در جلسه‌ی پیش به رابطه‌ی زیر رسیدیم و سوالی مطرح نمودیم که چگونه در مورد شتاب هر نقطه‌ی دیگری به غیر از مرکز جرم مانندA قضاوت نماییم.

$$\sum F_{ext} = M_t D_e^2 r_{OC_m}$$

داریم:

$$\sum F_{ext} = M_t D_e^2 (r_{OA} + r_{AC_m}) = M_t D_e^2 r_{OA} + M_t D_e^2 r_{AC_m}$$

به این ترتیب برای رسیدن به شتاب نقطه A نسبت به نقطه‌ی O (از دید زمین) کافی است شتاب A نسبت به مرکز جرم را دانست و به آن عبارت قبلی اضافه نمود.

$$D_e^2 r_{OA} = \frac{\sum F_{ext}}{M_t} + D_e^2 r_{C_m A}$$

در تعیین نیروهای خارجی باید توجه کنید که جسم‌تان را به چه صورتی تعریف نمودید. به عنوان مثال برای موشک اگر جسم را متشکل از موشک، سوخت و سوخت‌هایی که در حال سوختن هستند در نظر بگیرید، نیروهای خارجی به غیر از وزن، نیروهای بین هوا و موشک هستند. اما اگر موشک و سوخت‌های هنوز نسوخته را یک جسم بگیرید، و سوخت‌هایی که در حال سوختن هستند یک جسم دیگر آن‌گاه همین سوخت‌ها به عنوان یکی دیگر از منابع نیروهای خارجی محسوب می‌شوند.